

Bedingungsanalysen für unterrichtliche Zugänge zur Erarbeitung der Division von Bruchzahlen

LUKAS DONNER, ESSEN

Ein zentrales Element des Unterrichts zur Bruchdivision in der 6. Schulstufe ist die klar formulierbare Kehrwertregel als Verfahren zur Division von Bruchzahlen. Die unterrichtliche Erarbeitung dieses Verfahrens kann auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen: entweder als eigenständige Rechenoperation - unter Zuhilfenahme einer geeigneten Messsituation - oder unter Betonung der Division als Umkehroperation der Multiplikation. Im Rahmen dieses Beitrags sollen einige typische in deutschsprachigen Schulbüchern beschrittene Wege zur Erklärung der Kehrwertregel beleuchtet und deren jeweiligen Spezifika unter Bezugnahme auf theoretische und empirische Forschungserkenntnisse reflektiert werden.

1. Einleitung

Ich möchte meine Ausführungen mit zwei Aufgabenstellungen beginnen.

a) Führen Sie die folgende Division aus: $\frac{4}{9} : \frac{3}{5}$.

b) Erfinden Sie eine Sachsituation (Textaufgabe) zur Division aus a).

Obwohl die Bestimmung des Quotienten dieser Aufgabenstellung – wohl durch Rückgriff auf die bekannte Kehrwertregel $\frac{4}{9} : \frac{3}{5} = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{27}$ – problemlos möglich ist, kommt den allermeisten Lösenden für Teilaufgabe b) vermutlich ad hoc keine plausible Sachsituation in den Sinn, die dieser Rechenaufgabe entspricht. Bei der Bruchdivision wird ein Spannungsfeld sichtbar zwischen der Berechnung des Quotienten einerseits und der Vorstellungen zur Deutung der Rechenoperation andererseits. Dieses Spannungsfeld zeigt sich insbesondere bei der Erarbeitung eines Verfahrens zur Division von Bruchzahlen, bei dem es sich üblicherweise um die sogenannte Kehrwertregel („Man dividiert eine Zahl durch einen Bruch, indem man die Zahl mit seinem Kehrbuch multipliziert“) handelt.

Das Ziel der folgenden Ausführungen ist es, exemplarisch darzulegen, wie reichhaltig die möglichen Wege zur Erklärung der Kehrwertregel in der aktuellen Schulbuchliteratur im deutschsprachigen Raum gestaltet sind, welche Vorstellungen zur Division dabei jeweils leitend sind, und welche Bedingungen erfüllt sein sollten, damit der jeweilige Weg unterrichtlich erschlossen werden kann. Zu diesem Zwecke wird zunächst auf das Vorwissen der Schüler:innen vor der unterrichtlichen Behandlung der Bruchdivision eingegangen, und auch erörtert, wie die Einführung der Bruchdivision als notwendige Basis zur Erarbeitung einer Rechenregel zur Durchführung von Bruchdivisionen (üblicherweise die Kehrwertregel) gestaltet werden kann. Nach der Darstellung dreier unterschiedlicher Zugänge erfolgt ein Fazit, bei dem auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Wege eingegangen wird.

2. Vorwissen der Schüler:innen vor der Behandlung der Bruchdivision

Üblicherweise wird die Bruchdivision in Schulstufe 6 als „letzte“ der vier Grundrechenarten zu Brüchen thematisiert und bildet damit den Abschluss der expliziten Behandlung der Bruchrechnung. Neben dem Vorwissen rund um die drei anderen Grundrechenarten bringen die Schüler:innen weitere Vorerfahrungen mit, die, je nach unterrichtlich verfolgter Art der Erschließung des Verfahrens zur Division von Bruchzahlen, eine bedeutende Rolle einnehmen. Diese Vorerfahrungen, die gegebenenfalls im Unterricht vorab explizit wiederholt und damit aktiviert werden könnten, betreffen die *Deutung von Bruchzahlen* und das *Vorwissen zur Division aus dem Bereich der natürlichen Zahlen*,

insbesondere wenn der Rest gleich 0 ist. Diese beiden wesentlichen Bezugspunkte sollen deshalb kurz reflektiert werden.

2.1. Deutungen von Bruchzahlen

Brüche haben viele Gesichter (Hefendehl-Hebeker, 1996). Malle (2004) stellt am Beispiel des Bruchs $\frac{3}{4}$ dar, wie vielfältig Brüche gedeutet werden können (siehe Abb. 1). Um ein umfassendes Verständnis zum Bruchzahlbegriff aufbauen zu können, sind die Kenntnisse und Fähigkeiten zur Anwendung der verschiedenen Bruchzahldeutungen wichtig, wobei der Deutung eines Bruchs als Anteil/Teil (eines Ganzen) eine besondere, weil zentrale Rolle zukommt (Wittmann, 2002).

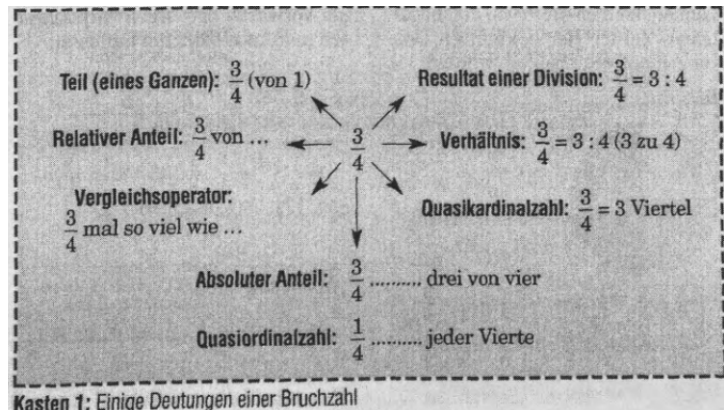


Abb. 1: Deutungen einer Bruchzahl (Malle, 2004, S.5).

In weiterer Folge wird dargestellt, dass neben der Vorstellung des Bruchs als relativen Anteil ($\frac{3}{4}$ von ...), die Schüler:innen zum Verstehen der Erklärungen der Bruchdivision je nach gewähltem Zugang die flexible Deutung von Brüchen als Quasikardinalzahl (3 Viertel), Brüchen als Division ($\frac{3}{4}$ bedeutet auch das Ergebnis der Division $3:4$, bzw. die potenzielle „Durchführbarkeit“ dieser Division), sowie des Bruchs als Vergleichsoperator benötigen. Des weiteren wird die Fähigkeit zum flexiblen Wechsel der Deutungen der auftretenden Bruchzahlen im Rahmen einer Argumentationskette benötigt.

2.2. Erfahrungen zur Deutung der Division im Bereich der natürlichen Zahlen

Drei Vorstellungen zur Division im Zahlbereich der positiven ganzen Zahlen sind wesentlich, wenn es in Schulstufe 6 um die Behandlung der Bruchrechnung geht: Die Division kann verstanden werden als *teilen*, als *aufteilen* (bzw. im folgenden *messen*) oder, aus strukturell mathematischer Perspektive wichtig, als Umkehrung der Multiplikation (vgl. Padberg und Benz, 2011, Malle, 2004). Die Vorstellung der Division als *Teilen* bedeutet, dass eine Grundmenge gegeben ist, sowie die Anzahl an (gleichmächtigen, paarweise elementfremden) Teilmengen bekannt ist, auf welche die Grundmenge gleichmäßig verteilt werden soll. Der Quotient entspricht der *Anzahl der Elemente je Teilmenge*. Beim *Messen* hingegen wird eine Grundmenge gleichmäßig in Teilmengen gegebener Größen aufgeteilt, der Quotient entspricht der *Anzahl an Teilmengen*. (Padberg und Benz, 2011). So führen beispielsweise die beiden folgenden Sachaufgaben auf die Division $28:4$, welche den beiden unterschiedlichen Vorstellungen zugeordnet werden können. Die Aufgabe „28 Kirschen werden gleichmäßig auf 4 Kinder verteilt. Wie viele Kirschen bekommt jedes Kind?“ entspricht einer Verteilsituation, wohingegen die folgende Aufgabe einer Messsituation entspricht; „28l werden in Kanister mit Fassungsvermögen 4l aufgeteilt. Wie viele Kanister werden benötigt?“. Typische Frage für die Deutung der Division als Messen ist „Wie oft passt ... in ...?“ oder „Wie oft ist ... in ... enthalten?“. Zunächst ist keineswegs klar, warum konkrete Mess- und Verteilprozesse, welche ja äußerst unterschiedlich sind, bei gegebenen

Ausgangsgrößen tatsächlich zum selben Ergebnis führen und dadurch durch dasselbe Rechenoperationszeichen dargestellt werden können; dies zu begründen gelingt insbesondere durch den Rückgriff auf die Definition der Division als Umkehrung der Multiplikation (Padberg und Büchter, 2021, S. 219f).

Die Beschreibung suggeriert, dass in aller Regel eine sinnvolle Interpretation des Dividierens als Teilen eine ganzzahlige Anzahl an Teilmengen voraussetzt, d.h. dass der Divisor eben ganzzahlig sein muss (Ausnahmen von dieser Regel für die Division durch eine Bruchzahl werden beispielsweise in Jansen und Hohensee (2016) diskutiert, diese sind aber allesamt für die erstmalige Erschließung der Bruchdivision in Schulstufe 6 aus meiner Sicht nicht von praktischer Relevanz). Sobald man durch Bruchzahlen dividieren möchte, verliert diese Vorstellung an Bedeutung (Padberg und Benz, 2011). Hingegen können „Teilmengen gegebener Größen“, welche für die Vorstellung der Division als messen maßgeblich sind, problemlos auch rationale Größen sein (z.B. $\frac{2}{9}m$, $\frac{1}{4}l$, ...), wodurch diese Vorstellung zur Erfassung zahlreicher Phänomene der Bruchdivision trägt. Für die vorstellungsbasierte Klärung typischer Situationen von Bruchdivisionen ist deshalb die Ausbildung der *Division als Messen* entscheidend, nicht zuletzt deshalb, weil diese Vorstellung in den neuen Zahlbereich der positiven rationalen Zahlen trägt.

In einer Studie mit Schüler:innen unterschiedlicher Schulstufen konnten Fischbein et al. (1985) zum Multiplizieren und Dividieren mittels Diagnoseaufgaben mit natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen nachweisen, dass Schüler:innen der 5. und 7. Schulstufe Divisionen als adäquate Beschreibung zur Lösung gegebener Sachsituationen in der Regel nur erkennen, wenn diese durch die Vorstellung des Teilens erklärbar sind. Die Vorstellung der Division als Messen ist hingegen erst bei Schüler:innen der 9. Schulstufe etabliert. Es könnte also sein, dass auch zum Zeitpunkt des unterrichtlichen Erschließens der Bruchdivision das Messen Schüler:innen nicht in einem ausreichenden Maße als Deutung der Division präsent ist. Eine weitere Herausforderung wird durch das folgende Zitat pointiert dargestellt:

„Es gibt Divisionen, die sich weder sinnvoll als Teilen noch als Messen deuten lassen, z. B. $4/9 : 3/5$. Wir stoßen hier zum ersten Mal auf eine Rechnung, für die keine sinnvolle Grundvorstellung existiert. Diese Division kann daher nur als eine formale Rechnung betrachtet werden, die nach bestimmten Regeln ausgeführt werden kann. Grundvorstellungen haben ihre Grenzen, das Formale trägt weiter als sie,“

schreibt Malle (2004, S.8) zur Deutung von Bruchdivisionen. Dieses Zitat, das von vielen Autor:innen im deutschsprachigen didaktischen Diskurs aufgegriffen wird, könnte aus meiner Sicht wie folgt interpretiert werden (vgl. auch Büchter und Donner, 2024): Prinzipiell besteht auch bei Aufgaben der Form $4/9 : 3/5$, also Aufgaben, bei denen zwei Bruchzahlen in allgemeiner Form auftreten, die Möglichkeit zu fragen: „Wie oft passt $3/5$ in $4/9$?“. Durch diese Idee des Ausmessens von Zahlen mit Zahlen (vgl. Hefendehl-Hebeker, 2004) ist die Vorstellung des Messens für alle Divisionen, zumindest vom höheren Standpunkt aus betrachtet, denkbar. Wie im folgenden bei der Diskussion der Schulbuchauszüge dargestellt wird, besteht sogar die Möglichkeit, durch die Verwendung derselben Maßeinheit (Erweitern auf denselben Nenner), die Division auch mithilfe des Rückgriffs auf die Messvorstellung rechnerisch auszuführen. Vom fachlichen Standpunkt aus betrachtet kann also jede Bruchdivision als Messen gedeutet werden. Der Autor betont jedoch meiner Interpretation nach, dass es in vielen Konstellationen zweier gegebener Bruchzahlen nicht sinnvoll und naheliegend ist, eine derartige Frage zu stellen (d.h. deren Division als Messen zu deuten), weshalb diese Vorstellung in sehr vielen Fällen keine anschauliche Orientierung zur Aufgabenbearbeitung bietet. Dies erklärt auch, wieso

das Beschreiben einer Sachsituation zur in der Einleitung gestellten Aufgabe so schwierig ist, obwohl man klarerweise fragen könnte „Wie oft passen $\frac{3}{5}$ m in $\frac{4}{9}$ m?“.

3. Zugänge zur Bruchdivisionsregel – didaktische Reflexionen und Wege in Schulbüchern

Üblicherweise stellt die Bruchdivision den Abschluss des Bruchrechnenunterrichts dar. Brüche in all ihren Deutungen wurden zu diesem Zeitpunkt des Unterrichts ebenso behandelt wie das Vergleichen zweier Bruchzahlen und die Rechenoperationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation, die allesamt auch im „neuen“ Zahlbereich der positiven rationalen Zahlen durchgeführt werden können. Viele etablierte Vorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, wurden dabei erweitert (Hefendehl-Hebeker und Prediger, 2006). Nun stellt die Erarbeitung der Bruchdivision im Unterricht zwei wesentliche Anforderungen dar:

- Zunächst ist es überhaupt nicht klar, wie die Operation der Division auch im neuen Zahlbereich der Bruchzahlen sinnvoll zu definieren oder zu deuten ist und warum es überhaupt zweckmäßig sein sollte, diese Operation auch auszuführen. Darum stellt die Einführung der Bruchdivision (Etablierung der Division) einen wesentlichen Schritt in der Unterrichtung der Bruchdivision dar.
- Um komfortabel rechnen zu können (d.h. Divisionen in beliebigen Konstellationen von Bruchzahlen und natürlichen Zahlen als Dividend und Divisor effizient durchführen zu können), ist die Erschließung einer universell einsetzbaren Rechenregel für die Division einer Zahl durch eine Bruchzahl wünschenswert.

3.1. Einführung der Bruchdivision

Wieso kann man natürliche Zahlen und Bruchzahlen durch Bruchzahlen dividieren?

Es gibt zwei unterschiedliche Arten, diese Frage im Unterricht zu thematisieren. „(1) Man führt die Division ohne expliziten Rückbezug auf die Multiplikation als eigenständige Rechenoperation ein, oder (2) man führt die Division als Umkehroperation der Division ein“ (Padberg und Wartha, 2023).

Die Einführung der Division als Umkehroperation ist in erster Linie eine Weiterführung des Gedankens der Umkehrung von Rechenoperationen im Bereich der natürlichen Zahlen. Denn aus der Primarstufe ist den Schüler:innen die Vorstellung der Division als Umkehrung der Multiplikation bekannt. Beispielsweise bezeichnet 24:3 diejenige Zahl, mit der ich 3 multiplizieren muss, um 24 zu erhalten. Diese Tatsache ist von hoher praktischer Relevanz, denn die Richtigkeit von durchgeführten Divisionen kann aufgrund dieser Beziehung immer mithilfe der Multiplikation des berechneten Quotienten mit dem ursprünglichen Divisor überprüft werden („Probe“). Im neuen Zahlbereich der positiven rationalen Zahlen ist es nun sinnvoll, analog vorzugehen: So soll beispielsweise der Ausdruck $3/4:5/8$ diejenige Zahl bezeichnen, mit der ich $5/8$ multiplizieren muss, um $3/4$ zu erhalten. Damit haben wir das Objekt „Zahl dividiert durch Bruchzahl“ durch Definition erfasst, die im Einklang mit bisherigen Erfahrungen mit der Idee der Umkehroperation steht.

Will man hingegen die Bruchdivision als eigenständige Rechenoperation einführen, also ohne der strukturellen Sicht auf die Division als Umkehrung der Multiplikation, so bietet sich der Bezug auf die Vorstellung des Messens an. Eine traditionelle Aufgabe zu diesem Zweck ist: „3kg Honig werden in Becher zu je $\frac{1}{2}$ kg gefüllt. Wie viele Becher können gefüllt werden?“ (Das ist Mathematik 1 und 2, 1965, S.134).

Einerseits kann diese Aufgabe ohne Rückbezug auf eine Rechenregel durch kontextbezogene Überlegungen (zählend bzw. formaler gesprochen „messend“) gelöst werden, bedarfsweise mithilfe des Zwischenschritts, wie oft $\frac{1}{2}$ kg in 1 kg passen. Offensichtlich können insgesamt 6 Becher gefüllt

werden. Andererseits ist der Zusammenhang mit der Division unmittelbar durch den Kontext und die Art der Fragestellung einleuchtend, denn wie aus dem Zahlbereich der natürlichen Zahlen (bzw. Größenbetrachtungen in diesem Zahlbereich) bekannt ist, werden derartige Situationen (Wie oft passt A in B) durch die Division ($B : A$) beschrieben. Die Aufgabe kann also formal mithilfe der Rechnung „3l: $\frac{1}{2}$ l=6“ notiert werden. Auch das Ausmessen von Strecken oder Flächeninhalten mit nicht-ganzzahligen Maßeinheiten, ohne expliziten Bezug auf einen Kontext, kann für die anschauliche Fundierung der Rechenoperation genutzt werden (siehe Abb. 2)



Abb. 2: Visualisierung einer Bruchdivision mittels Messens einer Strecke (aus Das ist Mathematik 2, 2017, S.67).

Eine Alternative zur Bezugnahme auf die Messvorstellung für die Bruchdivision als eigenständige Rechenoperation stellt eine wesentliche *Operationseigenschaft der Division* ins Zentrum der Betrachtung: Für den Zahlbereich der natürlichen Zahlen ist bekannt, dass eine Halbierung des Dividenden bei konstantem Divisor zu einer Halbierung des Quotienten führt (proportionaler Zusammenhang), und umgekehrt eine Halbierung des Divisors bei konstantem Dividenden zu einer Verdoppelung des Quotienten (indirekt proportionaler Zusammenhang). Auch beim Umrechnen von Größen tritt dieses Phänomen auf: Verfeinert man die Maßeinheit (z.B. von m auf cm), so verändert sich die Maßzahl um denselben multiplikativen Faktor. Beispielsweise findet sich in einem Lehrwerk der 5. Schulstufe als Ergänzung zu zahlreichen Aufgaben zum Umrechnen von Maßzahlen der folgende konkrete Hinweis: „Achtung bei den Umrechnungszahlen! Eine kleinere Einheit (z.B. cm) entsteht durch Division einer größeren Einheit (z.B. 1 cm = 1 m : 100). Eine Maßzahl in Meter muss aber mit 100 multipliziert werden, um in cm umgerechnet zu werden“ (Das ist Mathematik 1, 2016, Schulstufe 5, S. 80).

Es wäre doch mehr als wünschenswert, falls diese Operationseigenschaft der Division auch im neuen Zahlbereich der (positiven) Bruchzahlen Gültigkeit behielte. Die folgende Aufgabenserie (siehe Abb. 3), mittels systematischen Halbierens des Divisors (zeilenweise) und Dritteln des Dividenden (spaltenweise) ausgehend von der Operation „12:4“ kann zu diesem Zweck genutzt werden, um den konkreten Wert des Quotienten einer *Division durch Bruchzahlen* zu legitimieren. Die Tatsache, dass man auf diese Weise jede Bruchdivision „erzeugen“ und mit einem – bis auf Darstellung – eindeutigen Quotienten als Ergebnis belegen kann, wird aus diesem generischen Beispiel einer Permanenzmatrix unmittelbar einsichtig.

Tab. 1: Permanenzmatrix/Aufgabenserie zur Operationseigenschaft der Division ausgehend von „12:4“: Grau hinterlegt sind die Zellen, die bereits bekannte Divisionen im Bereich der natürlichen Zahlen darstellen. Idee entnommen aus Bücher (o. D.)

12: 4 =	4: 4 =	$\frac{4}{3}: 4 =$	$\frac{4}{9}: 4 =$
12: 2 =	4: 2 =	$\frac{4}{3}: 2 =$	$\frac{4}{9}: 2 =$
12: 1 =	4: 1 =	$\frac{4}{3}: 1 =$	$\frac{4}{9}: 1 =$
$12: \frac{1}{2} =$	$4: \frac{1}{2} =$	$\frac{4}{3}: \frac{1}{2} =$	$\frac{4}{9}: \frac{1}{2} =$
$12: \frac{1}{4} =$	$4: \frac{1}{4} =$	$\frac{4}{3}: \frac{1}{4} =$	$\frac{4}{9}: \frac{1}{4} =$

Bei diesem Zugang zur Bruchdivision mithilfe einer Permanenzmatrix handelt es sich um eine naive Verwendung des Prinzips der Permanenz der formalen Gesetze (Hankel, 1867): Die systematische Weiterführung der Division auch im neuen Zahlbereich wird motiviert und die Ergebnisse der betrachteten Divisionen werden durch Weiterführung des Musters plausibel dargestellt. In anderen Worten: WENN Quotienten von Bruchdivisionen wie „ $12 : \frac{1}{4}$ “ oder „ $\frac{4}{9} : \frac{1}{2}$ “ allgemein bestimmt werden sollen und dabei die Operationseigenschaft auf den neuen Zahlbereich erhalten bleiben soll, dann müssen die Quotienten eben genau den über das Muster erhaltenen Zahlen entsprechen. Wäre dies nicht der Fall, dann wären die beiden Operationen „Division in den natürlichen Zahlen (ohne Rest)“ und „Divisionen im Bereich der Bruchzahlen“ nicht miteinander kompatibel. Diese Idee des Rückbezugs auf das Permanenzprinzip mithilfe einer Permanenzmatrix findet sich im didaktischen Diskurs als Möglichkeit zur Erschließung von Operationen mit negativen Zahlen wieder (z.B. Rezat, 2014)

3.2. Gelingensbedingungen möglicher Erklärung einer Regel zur Bruchdivision – Analyse dreier Zugänge aus aktuellen Lehrwerken im deutschsprachigen Raum

Analog zur Etablierung der Bruchdivision kann die Regel zur Bruchdivision (Kehrwertregel) ausgehend von einem Messvorgang erklärt werden, oder durch die Nutzung von strukturell mathematischen Zusammenhängen, insbesondere in Form der Division als Umkehrung der Multiplikation.

In deutschsprachigen Lehrwerken findet sich dabei sowohl historisch als auch aktuell ein großer Variantenreichtum an Zugängen zur Kehrwertregel (vgl. Büchter und Donner, 2024). Im folgenden sollen die Erklärungen in den drei gymnasialen Schulbüchern „Lambacher Schweizer“ (Ausgabe NRW), „Das ist Mathematik“ (Österreich) sowie „Mathematik heute“ (Baden-Württemberg), welche exemplarisch die Reichhaltigkeit an möglichen Zugängen symbolisieren, kurz beschrieben sowie hinsichtlich Gelingensbedingungen aus stofflicher Perspektive für die Nachvollziehbarkeit des jeweils dargestellten Weges analysiert werden. Die ersten beiden Auszüge verfolgen einen Zugang über das Messen, letzteres über der Division als Umkehrung der Multiplikation.

Lambacher-Schweizer:

Beschreibung des Weges:

Das Erkenntnisinteresse der Betrachtung bildet die Fragestellung: „Wie oft passt $\frac{3}{4}l$ in $6l$ “. Zu diesem Zweck startet das Schulbuch mit einer schriftlichen Einführung zur Problemerkfassung.

„Bisher wurden Zahlen durch eine natürliche Zahl dividiert. Die Lösung der Aufgabe $6:3$ kann die Frage beantworten, ‚wie häufig die 3 in die 6 passt‘. Ähnlich kann die Frage, ‚wie häufig $\frac{3}{4}$ in die 6 passt‘ mit der Aufgabe $6 : \frac{3}{4}$ beantwortet werden. Wie man die Division durch einen Bruch ausführt, wird an einem Beispiel gezeigt. Wenn man systematisch untersucht, wie man den Inhalt eines $6l$ -Gefäßes auf gleich große andere Gefäße aufteilt, erhält man folgende Tabelle“. Die im Schulbuch angesprochene Tabelle ist in Abb. 3 dargestellt.

Im Anschluss an die Abbildung selbst erfolgt die Erklärung wesentlicher Elemente der Grafik, die letztlich zur Kehrwertregel führen:

„Beim Umfüllen der $1l$ -Gefäße in $\frac{1}{4}l$ -Gefäße vervierfacht sich die Gefäßanzahl: $6 \cdot 4 = 24$. Beim Umfüllen der $\frac{1}{4}l$ -Gefäße in $\frac{3}{4}l$ -Gefäße benötigt man $\frac{1}{3}$ der Gefäße. $24 \cdot \frac{1}{3} = 8$ Gefäße. Ergebnis: $\frac{3}{4}l$ passt 8-mal in $6l$, also $6 : \frac{3}{4} = 8$. Kontrolle: $8 \cdot \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 3}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

Insgesamt erhält man als Rechnung: $6 : \frac{3}{4} = 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$ Gefäße.

Anstatt durch $\frac{3}{4}$ zu dividieren, kann man also auch mit $\frac{4}{3}$ multiplizieren. $\frac{4}{3}$ nennt man auch den **Kehrwert** von $\frac{3}{4}$, weil hier Zähler und Nenner vertauscht (umgekehrt) wurden.“ (Lambacher Schweizer, S. 148., Zeilenumbrüche und Herv. wie im Original)

Direkt im Anschluss daran erfolgt die Formulierung der Kehrwertregel (Abb. 4)

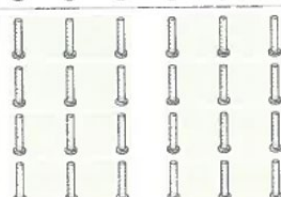
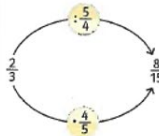
	Gefäßinhalt	Rechnung		Gefäßanzahl	
	2l	$6 : 2 = 3$		$(6 : \frac{3}{2} = 3)$	
halb so groß ↶	1l	$6 : 1 = 6$		6	↷ doppelt so viel
halb so groß ↶	$\frac{1}{2}$ l	$6 : \frac{1}{2} = 12$		12	↷ doppelt so viel
halb so groß ↶	$\frac{1}{4}$ l	$6 : \frac{1}{4} = 24$		24	↷ doppelt so viel
dreimal so groß ↶	$\frac{3}{4}$ l	$6 : \frac{3}{4} = 8$		8	↷ ein Drittel so viel

Abb. 3: Lambacher Schweizer, 2019, S.148.

Division durch einen Bruch
 Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem **Kehrwert** multipliziert. Der Kehrwert ist dabei der Bruch, bei dem Zähler und Nenner vertauscht sind.
 Die Regel gilt auch für die Division durch eine natürliche Zahl.

$$\frac{5}{6} : \frac{2}{7} = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 2} = \frac{35}{12}$$

$$\frac{3}{7} : 2 = \frac{3}{7} : \frac{2}{1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 2} = \frac{3}{14}$$



$\frac{5}{4} : \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$
 $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$
 $:\frac{5}{4}$ und $\cdot \frac{4}{5}$ führen zum selben Ergebnis.

Abb. 4: Merkgel zur Bruchdivision (Lambacher Schweizer, 2019, S.148).

Analyse des Weges:

Als Ausgangspunkt dient der *Rückbezug auf die Division im Zahlbereich N*, welche mithilfe eines vertrauten Kontexts (wieder) ins Gedächtnis gerufen werden soll. Anschließend erfolgt in Abb. 3 das Argumentieren mithilfe des *Permanenzprinzips*: Bleibt der Dividend konstant, so erfolgt ein multiplikativ gegensinniges Verändern von Divisor und Quotient. Diese Permanenz, die, wie im vorhergehenden Abschnitt erklärt, die Betrachtung eines Divisors im Bereich der rationalen Zahlen

ermöglicht, wird mithilfe der Messsituation plausibel gemacht. Demnach benötigen Schüler:innen die Aktivierung der Vorstellung der *Division als Messen*. Dieses Zusammenspiel aus Messen und Permanenzprinzip hat jedenfalls zur Folge, dass die Darstellung aus Abb. 3 sehr dicht an Informationen ist. Neben den verschiedenartigen Gefäßen treten ergänzende Rechnungen in Klammern auf (Zeile 1., Spalte ganz rechts) sowie die vielen ergänzenden Pfeile inklusive Erklärungen am linken und rechten Rand der Tabelle.

Die Erklärungen, die der Darstellung folgen, erläutern zunächst genau diese Permanenzüberlegungen. In der dritten Zeile erfolgt dann bei der „Kontrolle“ ein Rückgriff auf die Vorstellung der *Division als Umkehroperation der Multiplikation*, um das Ergebnis der Division (8 Gefäße) zu verifizieren. Auf diese Weise wird nicht mittels der beschriebenen Permanenz bezüglich des Quotienten argumentiert, sondern auf eine andere Facette von Permanenzüberlegung zurückgegriffen, nämlich, dass auch im neuen Zahlbereich, weiterhin diese Umkehreigenschaft der beiden Operationen gilt (vgl. Abschnitt 3.1). In der Zeile „Insgesamt ...“ folgt in einem ersten Schritt die „Übersetzung“ der inhaltlichen Argumente aus den beiden darüberliegenden Zeilen in die äquivalenten Terme $6 : \frac{3}{4}$ und $6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}$ und in einem weiteren Schritt durch einen Rückbezug auf die *Rechenregel der Bruchmultiplikation für natürliche Zahl mal Bruch*, dass „ $4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ “ gilt. Im letzten Umformungsschritt kann nun ausgehend vom ersten Term der Gleichungskette semantisch auf das Ergebnis (8 Gefäße) zurückgegriffen werden, aber auch mithilfe der bereits bekannten Bruchmultiplikation rein syntaktisch erschlossen werden. Durch diese doppelte Vergewisserung hat man das Ergebnis nun einerseits mittels der Division einer Zahl durch einen Bruch und andererseits mittels Multiplikation der Zahl mit dem Kehrbuch des ursprünglichen Bruchs erhalten, womit die Gültigkeit der Kehrwertregel am konkreten Beispiel nachgewiesen wurde. Auch wenn es sich laut Fragestellung um das Ausmessen von Rauminhalten handelt sei darauf hingewiesen, dass es sich trotzdem in der Regel um eine 1-dimensionale Betrachtung handelt, wenn man an praktische Umfüllvorgänge denkt, weil eine Raumvorstellung in Form der Beachtung der konkreten Maße der Gläser (Länge, Breite, Höhe) keine Rolle spielt – das einzig wesentliche Kriterium ist die Füllhöhe von Messbechern (vgl. Weiher und Ruwisch, 2018).

Die Idee der Permanenz wird jedoch nicht, wie in Abschnitt 3.1. erläutert, durch die Permanenzmatrix verdeutlicht, sondern in Form einer Permanenzreihe, weil nicht beide Dimensionen betrachtet werden. Somit werden Fälle, bei denen ein Bruch als Dividend vorkommt, bei diesem Weg nicht behandelt. Dass direkt im Anschluss an diese Aufgabe bereits ohne weitere Betrachtung von allgemeineren Fällen (z.B. kein ganzzahliger Quotient, oder Bruchzahl als Dividend und Divisor) die Formulierung der Kehrwertregel folgt, ist ganz im Sinne der ursprünglichen Intention dieses Zugangs zur Bruchdivision, wie Schweizer (1955) ausführt: „Die Kehrwertregel soll mithilfe einer Messsituation an einem besonders geeigneten Beispiel (mit ganzzahligem Quotient) erklärt werden. Die Gültigkeit der Regel ergibt sich zunächst nur für solche Fälle. Man lässt sie nun aber auch für alle Fälle gelten, auch für die Division zweier Brüche.“ (Schweizer, 1955). Dass die Regel für den allgemeinen Fall der Bruchdivision ebenso gilt, wird demnach den Schüler:innen mitgeteilt, wovon auch die Darstellung der Kehrwertregel (Abb. 4) im unmittelbaren Anschluss an die Ausführungen zum durchgerechneten Beispiel im Lehrwerk zeugt. Die Pfeilabbildung neben der Erklärung der Kehrwertregel bedingt dabei die Vorstellung des *Bruchs als relativen Anteil* (unterer Pfeil) und stellt heraus, dass die Division durch einen Bruch und die Multiplikation mit dessen Kehrbuch dieselbe Wirkung auf eine Ausgangszahl (hier exemplarisch: $\frac{2}{3}$) erzielen, weil sie zum selben Resultat führen (Vorstellung der Division als Umkehrung der Multiplikation). Dass es sich dabei um ein generisches Beispiel handelt, weil die Rollen von $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{4}$ unbedeutend sind und diese durch beliebige andere (Bruch-)Zahlen ersetzt werden können, geht klar hervor. Diese Gedächtnisstütze entspricht demnach einer weiteren Idee zur Erklärung der Kehrwertregel, die bei der Analyse des dritten Schulbuchauszugs genauer erörtert wird.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass innerhalb einer Aufgabe sowohl die Einführung der Division durch eine Bruchzahl erfolgt, indem der neuen Rechenoperation ein Sinn beigelegt wird, als auch die unterrichtliche Erschließung der Kehrwertregel. In besonderer Weise herausfordernd erscheint dabei die kognitive Erschließung der informationsdichten Darstellung (siehe Abb. 3) zu sein. Die Fundierung der Operation erfolgt mithilfe der Vorstellung der Division als Messen sowie der Idee der Permanenz, da Regel und Gesetzmäßigkeiten aus dem Zahlbereich der natürlichen Zahlen (insb. Divisionen mit ganzzahligem Quotienten) in den neuen Zahlbereich übertragen werden. Schweizer (1955) betont, dass man als Lehrkraft den Schüler:innen diese Tatsache, dass eine Rechenoperation nicht von vornherein bereits einen Sinn haben muss, sondern ihr erst ein Sinn beigelegt werden muss, an dieser Stelle nicht verheimlichen sollte.

Das ist Mathematik

Beschreibung des Weges:

Einen gänzlich anderen Zugang zur Kehrwertregel, ebenfalls basierend auf der Idee des Messens, verfolgt das Lehrbuch „Das ist Mathematik“. Die Schritte der Division einer ganzen Zahl durch eine Bruchzahl sowie die Division eines Bruchs durch einen Bruch werden gesondert betrachtet. Das folgende zweischrittige Argument bildet die Kernideen des Schulbuchs ab, welche zur Erklärung der Kehrwertregel führen.

Schritt 1 (Abb. 5): Das Dividieren wird als Messen aufgefasst. Ziel ist es, ein Gemeinsames Maß zu finden, was auf syntaktischer Ebene durch Erweitern des Dividenten mit dem Nenner des Divisors gelingt. Diese gemeinsame Maßeinheit kann bei der Division „weggelassen“ werden, weil der gemeinsame Nenner nun als Maßeinheit dieselbe Rolle wie jegliche andere Maßeinheit spielt.

Division einer natürlichen Zahl durch eine Bruchzahl



Eric hat zusammen mit seinen Freunden frischen Hollundersaft zubereitet. Insgesamt haben sie 6 Liter Saft erhalten. Diesen möchten sie nun in $\frac{3}{8}$ Liter Flaschen abfüllen. Um auszurechnen, wie viele Flaschen sie brauchen, messen sie, wie oft $\frac{3}{8}$ Liter in 6 Liter enthalten sind:

6 Liter : $\frac{3}{8}$ Liter = $\frac{48}{8}$ Liter : $\frac{3}{8}$ Liter = 16, weil $48 : 3 = 16$.

Sie erhalten also 16 Flaschen. Bei $\frac{48}{8} : \frac{3}{8} = 16$ spielen **Achtel** dieselbe Rolle wie zB **cm** bei $48\text{cm} : 3\text{cm} = 16$. Man misst, wie oft **3 Achtel** in **48 Achtel** enthalten sind.

Division einer natürlichen Zahl durch eine Bruchzahl

Eine **natürliche Zahl** wird durch eine **Bruchzahl** dividiert, indem die **natürliche Zahl** mit dem **Nenner der Bruchzahl** erweitert wird. Anschließend werden nur **die Zähler dividiert**.

Die Division durch eine Bruchzahl ist als **Messen** aufzufassen.

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c} : \frac{b}{c} = (a \cdot c) : b = \frac{a \cdot c}{b} \quad (b, c \neq 0)$$

Abb. 5: Division einer natürlichen Zahl durch eine Bruchzahl (Das ist Mathematik 2, 2017, S.67).

Schritt 2 (Abb. 6): Zunächst wird gezeigt, dass dieselben Überlegungen des 1. Schritts auch angewandt werden kann, wenn auch der Divident eine Bruchzahl ist: das gemeinsame Maß kann durch Gleichnamigmachen (das Erweitern des Dividenten und Divisors) gefunden werden. Der Quotient kann durch „Weglassen“ der Maßeinheit und der Division der Zähler des Dividenten durch den Zähler des Divisors ermittelt werden. In einem weiteren Schritt wird die Kehrwertregel am generischen Beispiel der Division $\frac{4}{5} : \frac{3}{8}$ herausgestellt und der Zusammenhang mit dem Kehrwert explizit in Textform formuliert. Abschließend erfolgt die Formulierung der Regel im Merkkasten.

Division von Bruchzahlen



Lisa legt Dominosteine der Länge nach auf einen Tisch. Der Tisch hat eine Länge von $\frac{4}{5}$ m, ein Dominostein ist $\frac{1}{20}$ m lang. Lisa überlegt: „Wenn ich $\frac{4}{5} : \frac{1}{20}$ rechne, dann weiß ich, wie viele Dominosteine ich in einer Reihe auflegen kann.“ Beim Dividieren einer natürlichen Zahl haben wir gesehen, dass gleiche Nenner hilfreich sind, denn dann müssen wir nur die Zähler dividieren und der Nenner fällt weg:

$\frac{4}{5} : \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$. Lisa kann also $\frac{4}{5}$ Steine auflegen.

Was ist mit Divisionen, bei denen der Divisor kein Stammbruch ist, zB $\frac{4}{5} : \frac{3}{8}$? Wir haben schon gesehen, dass gleiche Nenner, wie beim Addieren/Subtrahieren hilfreich sind:

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{32}{15} = (4 \cdot 8) : (5 \cdot 3) = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{15}$$

Zusammenfassend sieht man, dass die **erste Bruchzahl mit dem Kehrwert (Reziprokwert) der zweiten Bruchzahl** ($\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{8}{3}$) **multipliziert** wurde. Diese Vorgehensweise gilt auch allgemein!

Division von Bruchzahlen

Zwei **Bruchzahlen** werden **dividiert**, indem man die **erste** Bruchzahl mit dem **Kehrwert** der **zweiten** multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (b, d, c \neq 0)$$

Abb. 6: Division von Bruchzahlen (Das ist Mathematik 2, 2017, S.68).

Analyse des Weges:

Schritt 1:

Zum Verstehen dieses Schritts wird die ausgeprägte, flexible Nutzung der Vorstellung des *Bruchs als Quasikardinalzahl* benötigt, denn es wird explizit die Deutung von $\frac{48}{8}$ als „48 Achtel“ angeführt. Auf diese Weise erfolgt eine Rückführung der Division einer natürlichen Zahl durch einen Bruch (mit ganzzahligem Quotienten) auf den Fall der Division zweier natürlicher Zahlen, wobei dafür die Vorstellung des *Bruchs als Division* nötig ist, insbesondere, dass eine Division auch als Bruch gedeutet werden kann. Wittmann (2006, 2007) hält fest, dass die Quasikardinale Vorstellung einer Bruchzahl nicht in den Vordergrund des (anfänglichen) Bruchrechnenunterrichts gerückt werden sollte, weil diese zwar das Denken in den positiven ganzen Zahlen weiter führt, aber überwunden werden muss, um eine tragfähige Entwicklung des Bruchzahlbegriffs zu ermöglichen. Inwieweit diese Warnung bei der Erarbeitung der Kehrwertregel überhaupt von Bedeutung ist, welche ja in einem sehr weit fortgeschrittenen Stadium der Beschäftigung mit der Bruchrechnung stattfindet, muss wohl je nach Lernendengruppe von der Lehrkraft reflektiert werden. Jedenfalls benötigen Schüler:innen ein fundiert ausgebildetes Messverständnis (vgl. Roos und Ruwisch, 2015), um die flexible, bedarfsmäßige Nutzung von Einheiten nachzuvollziehen und als Argument in der Arithmetik nutzen zu können.

In Anbahnung an den hier abgebildeten Schritt 2 des Arguments (Abb. 6), gibt es im Schulbuch eine Vielzahl an Übungsanlässen, um mit dieser Art des Argumentierens vertraut zu werden. Darunter findet sich auch eine anschauliche Fundierung der Messidee mithilfe der Visualisierung aus Abb. 2.

Schritt 2:

Das gemeinsame Maß kann durch Gleichnamigmachen (das Erweitern des Dividenden und Divisors) gefunden werden und der Quotient durch Dividieren der nunmehrigen Zähler ermittelt werden. Diese Strategie, die für die Division beliebiger rationaler Zahlen (ungleich 0) durchgeführt werden kann, ist im englischen Sprachraum als „Common denominator algorithm“ bekannt und wird dort zuweilen als alleinige Möglichkeit zur rechnerischen Durchführung der Bruchdivision anstatt der Erklärung sowie Anwendung der Kehrwertregel zur Diskussion gestellt (vgl. Harmon, 1971).

Unter der expliziten Betonung (und damit einhergehende Aktivierung sowie *Analogiebildung*) der Nützlichkeit des Erweiterns auch bei den Operationen der Bruchaddition und -subtraktion, wird am generischen Beispiel $\frac{4}{5} : \frac{3}{8}$ der arithmetische Zusammenhang dieser Strategie mit der Kehrwertregel durch geschicktes Umformen erarbeitet: $\frac{4}{5} : \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 8}{40} : \frac{3 \cdot 5}{40} = (4 \cdot 8) : (3 \cdot 5) = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{5}$

Wir wollen nun die einzelnen Umformungsschritte dieser Kette gesondert analysieren.

Für den ersten Umformungsschritt ($\frac{4}{5} : \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 8}{40} : \frac{3 \cdot 5}{40}$) gilt es die folgenden Dinge zu beachten: Aus stofflicher Sicht muss die Einschränkung erwähnt werden, dass wir idealerweise von teilerfremden Nennern bei Dividend und Divisor (wie 5 und 8) ausgehen sollten, bzw. das Erweitern durch Multiplikation mit dem jeweiligen anderen Nenner erfolgen muss, selbst wenn es gemeinsame Primfaktoren geben sollte und man dadurch einen kleineren Hauptnenner als das Produkt der beiden Nenner der Brüche beim Erweitern verwenden könnte. Denn andernfalls würde eine gekürzte Darstellung des Ergebnisses resultieren, aus der die Kehrwertregel nicht unmittelbar ersichtlich ist, z. B.: $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 2}{8} : \frac{5 \cdot 1}{8} = (3 \cdot 2) : (5 \cdot 1) = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5}$. Darüber hinaus muss der Drang zurückgehalten werden, die Zähler, die man mittels Erweiterns erhält, direkt auszurechnen und in den Zählern unmittelbar das Resultat der Erweiterung zu notieren, denn andernfalls kann der Zusammenhang nicht gesehen werden, z.B.: $\frac{4}{5} : \frac{3}{8} = \frac{32}{40} : \frac{15}{40} = \frac{32}{15}$. Diese Beibehaltung der Faktoren und der damit einhergehende Verzicht auf das direkte Ausrechnen im Zuge des Erweiterns wird weder bei der Aufgabe „Hollundersaft“ [sic] noch der Aufgabe „Dominosteine“ benötigt.

Der zweite Umformungsschritt entspricht exakt der gerade am Beispiel „Dominosteine“ erarbeiteten Idee des Messens und benötigt keine weiterführende Idee.

Nun sind jedoch zusätzliche Umformungen nötig: Zunächst wird die Division wieder als Bruch geschrieben: $(4 \cdot 8) : (5 \cdot 3) = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 3}$. Dafür wird die Vorstellung des *Bruchs als Resultat einer Division* „in umgekehrter“ Richtung zur üblichen Interpretation benötigt. Diese Vorstellung muss demnach von Schüler:innen bereits während der Erschließung der Regel zur Bruchdivision flexibel angewandt werden können.

Abschließend erfolgt der finale Umformungsschritt, $\frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3}$, bei dem ein Bruch auf zwei Brüche getrennt wird. Dies kann entweder rein syntaktisch erfolgen oder mittels Aktivierung der sogenannten *Anteil vom Anteil*-Deutung der Bruchmultiplikation (Prediger 2006, Padberg und Wartha, 2023). Allerdings muss diese Vorstellung in entgegengesetzter gedanklicher Richtung vollzogen werden, als sie üblicherweise im Unterricht zur Bruchmultiplikation thematisiert wird, weil nicht die beiden Anteile ($\frac{4}{5}$ von $\frac{8}{3}$) den Ausgangspunkt bilden, sondern deren Produkt, welches gedanklich wieder in die beiden ursprünglichen Anteile zerlegt werden muss.

Auch bei den beiden im Schritt 1 und Schritt 2 verwendeten Messsituationen handelt es sich um 1-dimensionale Messbetrachtungen, weil das Fassungsvermögen bzw. die Länge der Dominosteine in den Fokus der Betrachtung genommen werden (und nicht die einzelnen Dimensionen der Ausbreitung der Gefäße oder eines Spielsteines).

Mathematik heute

Beschreibung des Weges:

In diesem Lehrbuch wird nach der Ausgangsgröße gefragt, wenn der Anteil an der Größe sowie die entsprechende Größe des Anteils bekannt sind. Die zentrale Idee dieses Ansatzes ist es nun, die Wirkung der Bruchmultiplikation (wieder) auf zwei verschiedene Arten rückgängig zu machen. Da dies der Umkehrung einer Multiplikation entspricht, kann diese Operation entweder mithilfe einer (Bruch)division durch den Anteil der Größe ermittelt werden. Oder aber, die Wirkung der Multiplikation wird durch die Anwendung des sogenannten „Gegenoperators“ der Multiplikation (d.h. Multiplikation mit dem Kehrwert) rückgängig gemacht. Um den Gegenoperator zu motivieren, wird in diesem Schulbuch die Bruchmultiplikation zunächst als zwei Teiloperationen betrachtet, welche jede für sich rückgängig gemacht wird. Auf diese Weise kann der Kehrbruch aus dem Pfeildiagramm direkt abgelesen werden.

1. Pauls Vater ist Landwirt. Er hat auf $\frac{3}{4}$ ha Blumenkohl angebaut. Das sind $\frac{5}{8}$ seines Feldes.
Wie groß ist das ganze Feld?



Lösung

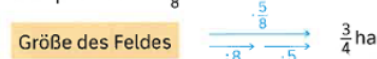
$\frac{5}{8}$ des Feldes sind $\frac{3}{4}$ ha groß.

Das Pfeildiagramm verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Multiplizieren und Dividieren.



Die Multiplikation mit $\frac{5}{8}$ soll durch die Division durch $\frac{5}{8}$ rückgängig gemacht werden. Dazu müssen wir die beiden Teilschritte der Multiplikation rückgängig machen.

Multiplikation mit $\frac{5}{8}$:



Rückgängigmachen der Multiplikation:



$\cdot \frac{8}{5}$ macht rückgängig, was $\cdot \frac{5}{8}$ bewirkt.

Deshalb können wir sagen: $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$ bedeutet dasselbe wie $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5}$.

$$\text{Rechnung: } \frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}$$

Ergebnis: Das Feld ist insgesamt $1 \frac{1}{5}$ ha groß.

Kehrwert von $\frac{5}{8}$

Abb. 7: Division von Bruchzahlen (Mathematik heute, 2020, S.81).

Analyse des Weges:

Bei diesem Zugang zur Kehrwertregel wird die Division als Umkehrung der Multiplikation ins Zentrum gerückt. Bei der Idee der Umkehrung einer Operation handelt es sich um eine bedeutende mathematische Idee, die den Schüler:innen von der Subtraktion als Umkehrung der Addition zu Beginn des Mathematikunterrichts bis hin zur Differential- und Integralrechnung an vielen Stellen des Mathematikunterrichts begegnet, wie beispielsweise Heitzer (2012) für das Lösen von Gleichungen im Algebraunterricht darlegt. Den Ausgang bildet eine den Schüler:innen vertraute Situation der Bruchmultiplikation (*Anteil vom Anteil*), allerdings mit unbekannter Ausgangsgröße und bekanntem Resultat. Dabei wird zusätzlich die Vorstellung des *Bruchs als Anteil* benötigt, denn in diesem Fall stellt die Grundgesamtheit die zu ermittelnde Größe des Feldes dar.

Um diesen Weg unterrichtlich erschließen zu können, ist ein gewisses Maß an Vertrautheit mit der Darstellung von Bruchoperationen mittels Pfeildiagrammen erforderlich, z.B. kann bereits bei der Behandlung der Bruchmultiplikation diese Darstellung verwendet werden. Die zugrundeliegende Vorstellung ist die Deutung des *Bruchs als (Vergleichs-)Operator*, welcher eine (multiplikative) Wirkung auf eine Zahl beschreibt. Außerdem muss den Schüler:innen bewusst sein, dass ein Bruch selbst auch bestehend aus zwei Teiloperationen (Mult. mit dem Zähler, Division durch den Nenner) gedeutet werden kann (*Bruch als (Resultat einer) Division*). Die Idee der Aufteilung der Bruchmultiplikation in zwei Teiloperationen kann entweder als syntaktisch nützlich herausgestellt werden, oder auch schrittweise inhaltlich begründet werden: Zunächst wird durch den Nenner des Anteils geteilt, wodurch die Ausgangsmenge in gleich große Teile zerlegt wird (*Division als Teilen*), anschließend werden ein paar dieser Teile (im konkreten Fall 5 davon) verwendet. Um diese beiden Operationen rückgängig zu machen, muss nun umgekehrt wieder in einem ersten Schritt die Größe *eines* Teils hergestellt werden (durch Division durch die Anzahl an Teilen), und durch Multiplikation mit der Anzahl an ursprünglichen Teilen erhält man die gesuchte Ausgangsgröße. Würde man hingegen bereits vorab im Rahmen der Bruchmultiplikation die Idee des Gegenoperators (multipliziert man einen Bruch mit seinem Kehrbuch, so erhält man 1) unterrichtlich bemerken, würde man an dieser Stelle darauf zurückgreifen und könnte auf die Aufteilung der Bruchmultiplikation in Teiloperationen verzichten. Von einem höheren Standpunkt aus betrachtet handelt es sich hierbei um die Nutzung der multiplikativen Einheit eines Körpers (in diesem Falle $\mathbb{Q}$) zur Erklärung, dass man Divisionen in einem Körper stets auch durch passende Multiplikationen ersetzen kann. Es bestünde also bereits im Unterricht der Sekundarstufe 1 die Möglichkeit zu betonen, dass man aus innermathematisch-struktureller Sicht von nun an mit nur zwei statt der bisherigen vier Grundoperationen auskommt, um alle Rechnungen durchführen zu können, weil jede Subtraktion durch eine Addition (mit der Gegenzahl) ersetzt werden kann und jede Division als eine Multiplikation (mit dem Kehrwert des Divisors) ausgeführt werden kann.

Eine Eigenschaft dieses Weges ist es, dass diese Begründung offensichtlich nicht von den konkreten Ausgangszahlen abhängt, sondern es sich um ein generisches Beispiel für jegliche Division durch eine Bruchzahl handelt: die „5“ und die „8“ spielen keine gesonderte Rolle, es könnte auch jeglicher anderer Anteil gegeben sein, die Begründung würde völlig analog erfolgen können.

Nicht nur allgemein die Idee der Umkehrung, sondern auch diese spezifische Art der Fragestellung nach der Ausgangsgröße bei bekanntem Anteil und Teil des Ganzen tritt im Rahmen der Prozentrechnung zur Ermittlung der Gesamtmenge („100%“) auf. Damit ist dieser Zugang spiralcurricular betrachtet sowohl vorbereitet, kann auch zu einem etwas späteren Zeitpunkt im Rahmen der Prozentrechnung wieder aufgegriffen werden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass diese Erklärung nicht nur im Vergleich zu den beiden Wegen über das Messen sehr kurz ist und mithilfe eines Pfeilbildes sehr prägnant dargestellt werden kann, wodurch eine einfache Rückerinnerung an die Kehrwertregel möglich scheint (Padberg, 1982). Das Aufgreifen eben dieser Art der Pfeilbilder im Schulbuch Lambacher-Schweizer (Abb. 4.), welches durch die historische Entwicklung des spezifischen Schulbuchs begründet sein könnte (Büchter und Donner, 2024) legt zumindest in einem gewissen Grade auch nahe, dass sich diese Art der Visualisierung wohl in besonderer Weise zur Verdeutlichung der Kehrwertregel eignet.

4. Fazit zum Unterrichtsgang der Bruchdivision

Die unterrichtliche Erschließung der Bruchdivision umfasst zwei unterschiedliche Herausforderungen: Die Division durch Brüche muss einerseits eingeführt und ein Verständnis dafür konsolidiert werden, andererseits muss den Lernenden eine Möglichkeit an die Hand gegeben werden, alle Bruchdivisionen auch ausführen zu können. Üblicherweise stellt die Erklärung und anschließende Anwendung der Kehrwertregel diesen zweiten Punkt sicher, wobei manche Schulbücher im Rahmen der Erschließung

der Kehrwertregel durch den common denominator algorithm ($\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} : \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = (a \cdot d) : (c \cdot b)$) auch eine weitere Möglichkeit etablieren, beliebige Bruchdivisionen ausführen zu können (vgl. Das ist Mathematik).

Zur Einführung der Bruchdivision bietet sich die Aktivierung und Bezugnahme auf die Messvorstellung in besonderer Weise an, denn nur durch das Ausmessen von Strecken (Abb. 2), Flächen, Volumina (etc.), ist eine anschauliche Fundierung der Division durch eine Bruchzahl – zumindest in günstigen Fällen (insb. bei ganzzahligem Quotient) – möglich. Alternativ kann sie auch mittels strukturell-innermathematischer Überlegungen als Umkehrung der Multiplikation oder mittels einer Permanenzmatrix erschlossen werden.

Die Erklärungen der *Regel* zur Bruchdivision („Kehrwertregel“) kann mittels Messen erfolgen (mit den genannten Einschränkungen bei der Analyse der Schulbuchauszüge), oder mithilfe der eher strukturellen Sicht auf die Division als Umkehrung der Multiplikation.

Der Lehrkraft sollte bewusst sein, welche spezifischen Voraussetzungen, Eigenschaften sowie Vor- und Nachteile die unterschiedlichen Erklärungen der Kehrwertregel mithilfe des Messens oder mittels Umkehrung haben, um einschätzen zu können, „bis wohin“ die Erklärung trägt. Auch kann dieses Wissen helfen, um notwendige Voraussetzungen zum Verständnis vorab gegebenenfalls in der Lerngruppe aktivieren zu können. Inwiefern beispielsweise die Messvorstellung von Schüler:innen spontan aktiviert wird, kann bei der jeweiligen Lerngruppe mit Diagnoseaufgaben wie „Erfinde zwei Sachsituation zu $28:4=7$ “ erfasst werden. Durch die dezidierte Frage nach zwei Situationen ist es denkbar, dass Schüler:innen versuchen, zwei verschiedenartige Sachsituationen zu beschreiben und dadurch beide anschaulichen Vorstellungen zur Division aktiviert werden.

Die abschließende Auflistung zeigt, in welchen Merkmalen sich die in diesem Beitrag beispielhaft analysierten Wege der Schulbücher zur Erklärung der Bruchdivision unterscheiden (in Klammern werden jeweils die betreffenden Schulbuchauszüge in der Reihenfolge der Darstellung von oben angegeben; d.h. (1) Lambacher-Schweizer, (2) Das ist Mathematik, (3) Mathematik heute):

- In der Bezugnahme auf die *Grundvorstellungen zur Division* in $\mathbb{N}$: Wird die *Division als Messen* gedeutet (1,2) oder vorrangig als *Umkehrung der Multiplikation* (3).
- Im *Grad der Allgemeinheit*: Wird ein Spezialfall betrachtet (1), wird ein allgemeiner Nachweis geführt (2) oder wird ein generisches Beispiel zur Begründung herangezogen (3).
- In der Art der benötigten *Deutungen der Bruchzahl*: Benötigt wird ein flexibler Umgang mit je einer Teilmenge der folgenden Deutungen: Bruch als Resultat einer Division (2,3), Bruch als Quasikardinalzahl (2), Bruch als Vergleichsoperator (in Pfeildarstellung) (3), Bruch als relativer Anteil (1,2). Während die Erklärung im Lehrwerk Lambacher-Schweizer also nur eine Deutung der Bruchzahl (als relativer Anteil) benötigt, sind es demnach bei Das ist Mathematik und bei Mathematik heute je zwei unterschiedliche Deutungen.
- In der *Vertrautheit mit weiteren, spezifischen Grundlagen der Bruchrechnung und Operationseigenschaften der Division*: Anteil vom Anteil-Deutung der Bruchmultiplikation (2,3), Erweitern von Brüchen (2), indirekt proportionaler Zusammenhang zwischen Divisor und Quotient (1), Permanenzidee für Ergebnisse von Operationen im neuen Zahlbereich (1). Dabei wird die *Anteil vom Anteil*-Deutung der Multiplikation in den beiden Lehrwerken (Das ist Mathematik bzw. Mathematik heute) auf unterschiedliche Weise benötigt. Durch diese Aufstellung wird deutlich, dass Mathematik heute mit nur einer spezifischen Grundlage auskommt, wohingegen die anderen beiden Zugänge auf mehrere Grundlagen zurückgreifen.
- Im *Umfang* der Erarbeitung der Kehrwertregel: Der Weg über die Umkehrung (3) ist sehr kurz und das Wesen des Zugangs ist durch eine einzige Pfeildarstellung erfasst, der Weg über das Messen (1,2) hingegen gekennzeichnet durch mehrschrittige Argumente und die (initiale) Betrachtung des

Spezialfalls von Divisionen mit ganzzahligen Quotienten. Eine eigenständige Rückerinnerung von Schüler:innen an die Regel erscheint darum bei einer Erklärung mithilfe der Umkehrung wesentlich einfacher und somit vielversprechender (Padberg 1982).

- Nicht zuletzt dadurch, dass die drei Lehrbücher unterschiedlichen Curricula folgen (Nordrhein-Westfalen (1), Österreich (2) bzw. Hessen (3)), unterscheiden sie sich darüber hinaus im *Grad der Verwendung von Fachsprache*.

Literatur

- Büchter (o.D.) Vorlesung Didaktik ausgewählter Unterrichtsinhalte der Sekundarstufe I: Aufbau des Zahlensystems im Mathematikunterricht
- Büchter, A. & Donner, L. (2024). Die Herleitung der Regel zur Bruchdivision im didaktischen Diskurs und in ausgewählten Schulbuchreihen - eine Geschichte mit Spannungsverhältnissen und Verwerfungen. In G. Ambrus, J. Sjuts, & É. Vásárhelyi (Hrsg.) *Mathematikdidaktische Impulse aus Vergangenheit und Gegenwart* (S.159–174). Münster: WTM-Verlag
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3–17
- Hankel, H. (1867). *Theorie der complexen Zahlensysteme: insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen, nebst ihrer geometrischen Darstellung* (Vol. 1). Leipzig: Voss.
- Harmon, H. (1971). All about division with rational numbers – Variation on a theme. *School Science and Mathematics*, 71(6), 501–507.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *mathematik lehren*, 78, 20-48
- Hefendehl-Hebeker, L. (2004). Zahlen mit Zahlen ausmessen. In G. Müller, H. Steinbring, & E. Ch. Wittmann (Hrsg.) *Arithmetik als Prozess* (S. 71–79). Seelze: Kallmeyer
- Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern–Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48(11), 1-7.
- Heitzer, J. (2011). Operation und Umkehroperation: Eine Strategie zum Lösen vieler Gleichungen. *mathematik lehren*, 169, 49-53.
- Jansen, A., & Hohensee, C. (2016). Examining and elaborating upon the nature of elementary prospective teachers' conceptions of partitive division with fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(6), 503–522.
- Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren*, 123, 4–8.
- Padberg, F. (1982). Wege zur Ableitung der Divisionsregel der Bruchrechnung Bestandsaufnahme – Beurteilung – Folgerungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 3, 67–88.
- Padberg, F., & Benz, Ch. (2011). Didaktik der Arithmetik. München: Spektrum Akademischer Verlag, Elsevier
- Padberg, F., & Büchter, A. (2021). *Einführung Mathematik Primarstufe-Arithmetik* (2. Aufl.). Berlin: Springer.
- Padberg, F., & Wartha, S. (2023). Didaktik der Bruchrechnung: Brüche – Dezimalbrüche – Prozente (6. erw. Aufl.). Berlin: Springer.
- Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben - Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48(11), 8-12.
- Rezat, S. (2014). Das Permanenzprinzip erfahren: An der 1+1-Tafel und der 1×1-Tafel das Rechnen mit negativen Zahlen operativ erkunden. *mathematik lehren*, 183, 11–14
- Roos, S., & Ruwisch, S. (2015). „Mit einem Lineal kann man messen“ – Lernvoraussetzungen mit dem weißen Blatt und Mini-Tests erheben. *Grundschule Mathematik*, 47, 4-5.
- Schweizer. (1955). Zur Methodik und Didaktik des Bruchrechnens. *Der Mathematikunterricht*, 1(2), 51–66.
- Weiher, D. F. & Ruwisch, S. (2018). Kognitives Schätzen aus Sicht der Mathematikdidaktik: Schätzen von visuell erfassbaren Größen und dazu erforderliche Fähigkeiten. *mathematica didactica*, 41(1), 77-103.

- Wittmann, G. (2006). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen – auch für leistungsschwache Schüler? Eine mehrperspektivische Interviewstudie zu Lösungsprozessen, Emotionen und Beliefs in der Hauptschule. *mathematica didactica*, 29(2), 49-74.
- Wittmann, G. (2007). Mit Bruchzahlen experimentieren: Darstellungen wechseln-Grundvorstellungen entwickeln. *mathematik lehren*, 142, 17-23.

Schulbuchliteratur

- „Das ist Mathematik 1“ (öbv Verlag). 5. Schuljahr: Erscheinungsjahr 2016, ISBN: 978-3-209-09159-8
- „Das ist Mathematik 2“ (öbv Verlag). 6. Schuljahr: Erscheinungsjahr 2017, ISBN: 978-3-209-09160-4
- „Lambacher Schweizer“ (Klett Verlag, Ausgabe Nordrhein-Westfalen). 6. Schuljahr: Erscheinungsjahr 2019, ISBN: 978-3-12-733861-4
- „Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung“ (Hölder-Pichler-Tempsky). 5. und 6. Schuljahr: Erscheinungsjahr 1965 (6. unv. Auflage), Ludwig, E. & Laub, J. (Hrsg.) [Anm. d. Verf.: Entspricht „Das ist Mathematik 1 und 2“]
- „Mathematik heute“ (Westermann Gruppe, Ausgabe Hessen). 6. Schuljahr: Erscheinungsjahr 2020, ISBN 978-3-14-150410-1

Verfasser

Lukas Donner
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
D-45127 Essen
lukas.donner@uni-ude.de